En kort historik över kaos

Daniel Kallin
820121-3918
10 Januari 2007

Ett kaotiskt system är en modern uppfinning. Konceptet kan spåras tillbaka till 1800-talets slut men terminologin och i princip all foskning inom området är inte äldre än 50 år.

Ett kaotiskt dynamiskt system är ett tidsberoende system som uppvisar en stor känslighet för störningar av begynnelsevärden. Systemen uppträder *kaotiskt* i det att en mycket liten störning ger mycket stora effekter i den långsiktiga utvecklingen av systemet. Men systemet är fortfarande *deterministiskt*. Givna begynnelsevärden producerar alltid samma resultat. Resultat som dock kan vara mycket svåra att förutsäga.

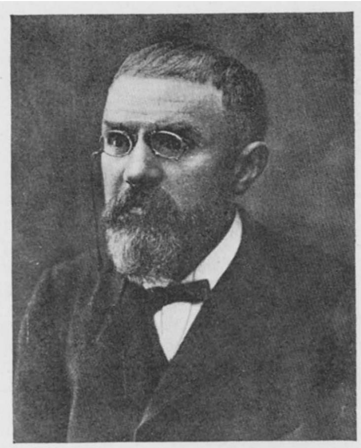
Det kaotiska beteendets upptäckare

Kring sekelskiftet 1800-1900 rådde en tro på linjärteorin, tanken att system kan beskrivas av linjära modeller vid tillräckligt små kraft, tids eller längdskalor.[1] Tanken var att det fanns något slags samband mellan storleken på en påverkan och storlekens på dennas effekt. Då som nu är detta ett beteende som vi till vardags förväntar oss av vår omgivning.

Den franske matematikern Jaques Hadamard beskrev 1898 ett system partiklar som rörde sig på en yta med konstant negativ krökning. Alla banor som dessa partiklar kan röra sig i är instabila. Detta innebär att två partiklar som inte har identiska positioner och hastigheter kommer att divergera i sina banor godtyckligt mycket oavsett hur liten skillnaden var mellan partiklarna från början. Detta är det som vi idag skulle definiera som ett dynamisk system. Systemet bröt mot den linjära tankegången, partiklarnas avvikelser kunde ej linejäriseras med avseende på påverkan på partiklarna. Hadamards dynamiska system fascinerade och inspirerade flera stora namn inom matematiken men förblev i sig en matematisk kuriositet.[2] Det är istället Henri Poincarés som idag förknippas med de dynamiska systemens födelse.

Jaques Hadamard

Poincaré var arketypen för den naturvetenskaplige vetenskapsmannen på sekelskiftet. Han var en briljant matematiker och fysiker med en bred repertoar av revolutionerande upptäckter. Samtidigt var han tankspridd och hade ingen drift att gå tillbaka till tidigare verk för att förfina och förbättra. Han började ständigt arbeta på nya områden och såg få anledningar att täppa till de oklarheter som fanns i hans arbeten om han väl hade lyckats skissa upp en grov lösning. Under sin tid på ingenjörsskolan i Mines urarbetade han ett nytt, geometriskt, angreppssätt på differentialekvationer. Detta arbete presenterade han 1878 som hans doktorsavhandling vid Paris universitet inför bland annat Gaston Darboux.[3]



Henri Poincaré.

Historian om hans upptäckt av kaotiska dynamiska system börjar i Sverige, med vår mest kände matematiker Mittag-Leffler och svenske kungen Oscar II.

---

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_theory, http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory

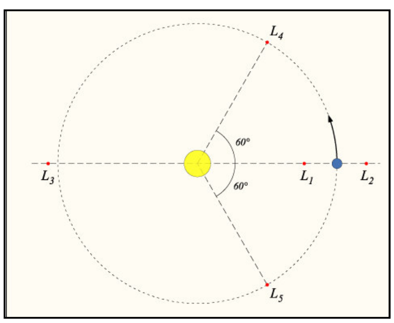
[3] http://www.sciencenews.org/pages/sn_arc99/11_13_99/mathland.htm

Gösta Mittag-Leffler var strax innan sekelskiftet professor vid det som skulle bli Stockholm Universitet. Bara ett år efter att han hade knutits till skolan startade han sin tidskrift *Acta Mathematica*, en tidskrift som stöddes av den vetenskapligt intresserade kungen Oscar II.[4] 1885 var det fyra år kvar till Oscar II 60-årsdag. Mittag-Leffler föreslog då för kungen en tävling för världens matematiker som en del i firandet av regentens födelsedag. Oscar II gillade förslaget och Mittag-Leffler fick i uppdrag att sammanställa en jury och en lista med problem varur tävlingsdeltagarna skulle välja ett att publicera en vetenskaplig artikel kring. Han vände sig till sin gamla lärare från universitetet i Berlin, Karl Weierstrass, som föreslog fyra problem. Ett av dessa fyra problem behandlade flerkroppsproblemet.

Gösta Mittag-Leffler

"Givet ett system av godtyckligt många masspunkter som lyder under Newtons lagar, under antagandet att inga punkter kolliderar, bestäm de tidsberoende koordinaterna för alla punkter för alla tider uttryckt som en summa av uniformt konvergenta serier vilkas termer består av kända funktioner."

Tvåkroppsproblemet, alltså uppgiften att bestäma rörelserna hos två himlakroppar som bara påverkar varandra genom sin ömsesidiga gravitation är i den Newtonska mekaniken enkelt. Men redan med tre himlakroppar blir problemet dramatiskt svårare. Det var vid 1800-talets slut okänt om problemet var lösbart men det matematiska samfundet ansåg att om en lösning fanns så borde man i sitt sökande inrikta sig på lösningar på formen av oändliga summor av funktioner.[5]



De 5 Lagrangepunkterna i ett tvåkroppssystem.

Trekroppsproblemet var dock inte helt outforskat, redan 1772 hade Lagrange funnit stabila lösningar till problemet. Dessa lösningar involverade banor kring tomma punkter i rymden som kallas Lagrangepunkter efter upptäckaren. I ett system med två himlakroppar som roterar kring varandra kommer det att finnas punkter i systemet där gravitationspotentialen bildar sadel- eller minimapunkter. Kring dessa punkter kan en tredje himlakropp av försumbar massa gå i omloppsbana. Men dessa stabila lösningar är speciella och tävlingen var tydlig i att uppgiften var att finna generella lösningar.[6]

Tävlingen, vars pris var en guldmedalj att motta ur kung Oscar II:s hand och en modest prissumma på 2500 kronor, marknadsfördes kraftigt och en av de matematiker som drogs till tävlingen var Poincaré. Han valde att attackera problemet med sitt egna angreppssätt för differentialekvationer som han doktorerade med. Flerkroppsproblemet är mycket svårt och Poincaré tänjde gränserna uppsatta av uppgiftslydelsen. Resultatet av hans arbete blev ett långt och komplext bidrag till tävlingen som innehöll mycket stark matematik men ändock

[4] http://www.math.su.se/matematik/Historia/Historia.html
[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem
[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_points

inte var en konkret lösning på problemet såsom det ställdes i tävlingen. Bidraget visade sig svårgenomträngligt för juryn bestående av bland annat Weierstrass. Kontrollen av tävlingsbidragen var givetvis tvungen att bli klar innan konungens födelsedag och pressen ökade kontinuerligt på tävlingsjuryn. Weierstrass m.fl. bestämde sig till slut för att Poincarés bidrag var det som uppvisade störst kvalitéer och skulle, trots författarens avsteg från problemställningen och trots att den inte representerade en fullständig lösning, utses till det vinnande bidraget.

Weierstrass svar till Mittag-Leffler blev:
"Ni kan meddela er regent att detta arbete ej kan anses bidra med den fullständiga lösningen till den ställda frågan, men att den detta till trots är av sådan vikt att dess publicering kommer att inleda en ny era inom läran om himlakropparnas mekanik"

Således i Januari 1889 mottog Poincaré priset ur kung Oscar II:s hand under pompa och ståt. Efter detta återvänder han till Frankrike, men hans arbete kommer inte all lämna honom ifred särskilt länge.

Mittag-Leffler påbörjar nu arbetet med att redigera en ny upplaga av hans tidskrift *Acta Matematica* som skall innehålla det vinnande bidraget från tävlingen. Under denna process upptäcker Lars Edvard Phragmén, en av Mittag-Lefflers tidigare studenter,[7] vissa brister i Poincarés arbete. De var av ringa art och författaren korrigerar dem rask. Men i och med att Poincaré återvänder till sitt gamla arbete upptäcker han ett större, allvarligare, fel i sitt tävlingsbidrag. I det avsnitt där han behandlar stabiliteten hos trekroppssystemet fanns allvarliga misstag. Poincaré telegraferar till Mittag-Leffler att han upptäckt ett misstag och lovar ett svar med rättelser. Men *Acta Matematica* hade redan gått i tryck.

Situationen som uppstår riskerar att utveckla sig till en politiskt katastrof för Mittag-Leffler som hade starka band till hovet.[8] Det var han som förslog tävlingen för Oscar II. Han valde ut både frågeställningarna och juryn som utsåg Poincaré till vinnare. Han var redaktör för *Acta Matematica* som nu innehöll ett till synes felaktigt vinnande tävlingsbidrag. Mittag-Leffler gjorde den dramatiska åtgärden att återkalla och förstöra den delen av upplagan som redan hade distribuerats. Han kontaktade Poincaré och övertygade honom att producera en ny, rättat, artikel. Arbetet tog flera månader och ackompanjerades av en febril brevväxling mellan Poincaré och Mittag-Leffler som kände ett stigande press att publicera. Till slut var Poincaré klar och hans korrigerade artikel var nästan 100 sidor längre än originalet. I denna artikel bevisade Poincaré att vissa konfigurationer av trekroppsproblemet var instabila i det att de var extremt känsliga för störningar av ursprungsvärdena. Insikten att deterministiska system kan bete sig på sätt som inte inbjuder till förutsägningar var revolutionernade.

"...det kan hända ett en liten skillnad i begynnelsevillkoren ger upphov till mycket stora skillnader i det slutgiltiga fenomenet. Ett litet fel i den tidigare ger enorma fel i den senare. Förutsägning blir omöjlig."

---

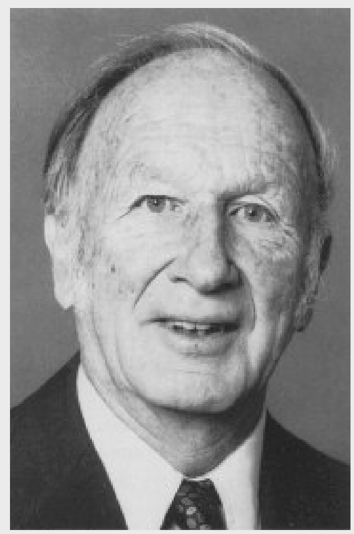
[7] http://www.svd.se/dynamiskt/kultur/did_9280394.asp
[8] http://www.svd.se/dynamiskt/kultur/did_9280394.asp

En exakt lösning

Mer av en parentes bör nämnas att den finske matematikern Karl Fritiof Sundman lyckades med bragden att 1912 presentera en exakt lösning till trekroppsproblemet. Den hade formen av oändliga serielösningar, precis som hade föreskrivits i Oscar II:s tävlingsuppgift. Sundmans matematiska bedrift skall inte förringas men den praktiska betydelsen av hans lösning är mycket begränsad. Serierna konvergerar nämligen mycket långsamt och för att få en precision som motsvarar den som astronomiska observationer inom solsystemet har skulle man behöva $10^{8\,000\,000}$ termer.[9]

Datorerna som katalysator

Efter Poincarés arbete skedde mycket lite utveckling av kaosbegreppet. Man kunde analytiskt konstatera att det fanns system som uppträdde kaotiskt men det var svårt eller omöjligt att studera systemen som hade bevisats bete sig kaotiskt. En av anledningarna var antagligen bristen på kraftfulla verktyg. Analytisk lösningar fortsatte dock att produceras, t.ex Sundmans, men studier av de kaotiska beteendet fick vänta. Alla numeriska beräkningar var tvugna att utföras av människor och således låg ämnesområdet avsomnat i 160 år tills dess att datorerna gjorde sitt intrång i vetenskapen.



Edward Lorenz

Det skulle bli en meterolog som gjorde den upptäckten som gjorde kaosforskning populär. Hans namn är (för detta är ett exempel på levande historia där upphovsmannen fortfarande lever) Edward Lorenz och han jobbade med en av de tidiga datorerna för att göra meterologiska förutsägelser. Han gjorde väderprognoser under andra världskriget, ett arbete som drev honom att studera meterologi vid MIT. 1961 gjorde Lorenz simuleringar av atmosfäriska strömningar på en tidig dator (en Royal McBee LGP-30). Simuleringarna tog mycket lång tid på dåtidens hårdvara och när Lorenz vid ett tillfälle ville återvända till datasekvens som han vid ett tidigare tillfälle hade beräknat utnyttjade han utskrifterna från den körningen för att börja halvvägs och på så sätt inte behöva utföra de första beräkningarna. Som begynnelsedata för det atmosfäriska strömningsproblemet matade han data från halvvägs igenom utskriften från en tidigare körning. När datorn utförde beräkningen såg han till sin förvåning att simulationen efter ett tag avvek dramatiskt från den tidigare körningen. Trots att ekvationerna var oförändrade och tillståndsdatat borde vara detsamma. Lorenz lyckades spåra avvikelsen till det faktumet att pappersutskrifterna från den tidigare körningen var avrundade till 3 decimaler samtidigt som datorn utförde sina interna beräkningar med 6 decimalers noggrannhet.[10] Lorenz hade alltså gjort en mycket liten förändring av systemets tillstånd mellan de två körningarna. Att en sådan liten förändring kunde ge väsentliga skillnader var oväntat och ledde likt Poincarés upptäckt till ett paradigmskifte inom meterologin. Om störningar som är mindre än noggrannheten hos märinstrumenten kan ge upphov till enorma förändringar av systemets långsiktiga utveckling finns det oöverstigliga barriärer för hur långt fram i tiden man kan göra meningsfulla väderprognoser. Lorenz gav ett tillskott till den populärkulturella ordförrådet med termen "fjärilseffekten" efter att ha publicerat en artikel med namnet *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?* som anspelade på de stora effekterna

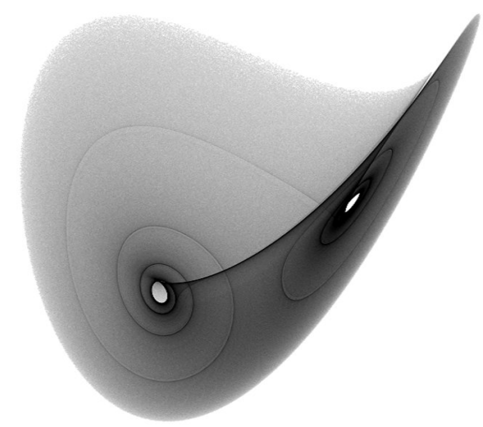
[9] http://scienceworld.wolfram.com/physics/RestrictedThree-BodyProblem.html
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory

av mycket små störningar av dynamiska system. I sin publikation *Deterministic Nonperiodic Flow* presenterade han ett enkelt tredimensionellt ekvationssystem med oändlig komplexitet som numera har blivit sinnebilden av kaos, Lorenzattraktorn.

Lorenzattraktorn är den yta som banan hos en partikel följer om dess rörelse definieras av nedanstående ekvationssystem dras mot. σ, ρ och β är parametrar som kan varieras vilket ger upphov till förändringar av attraktorns form. Kvalitativt kan man säga att det kaotiska beteendet hos systemet ligger i angörandet om partikeln kommer att kretsa kring den ena eller den andra fjärilsvingen hos figuren. Partikeln kretsar några varv i den ena "vingen" och byter sedan, helt oförutsägbart, till den andra vingen.

Ekv. 1

$$dx/dt = \sigma (y - x)$$
$$dy/dt = x(\rho - z) - y$$
$$dz/dt = x y - \beta z$$



Lorenzattraktorn
Ytan en partikel följer vars tillstånd bestämd entydigt av ekv. 1

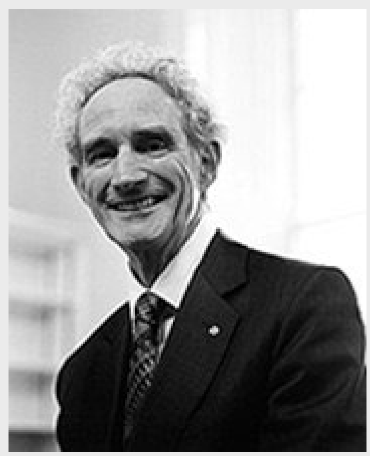
Skalinvarians

Under 70-talet knyts band mellan konceptet med kaotiska dynamiska system (som då fortfarande var i sin linda) och ett annat ämnesområde, fraktaler. Kaotiska system uppvisar ibland samma egenskaper som fraktaler. Det första upptäckten av dessa egenskaper gjordes av biologen Lord Robert May.

May studerade en primitiv modell för djurpopulationer och speciellt populationernas långsiktiga beteende. Den hade bara en inparameter, populationens storlek, och en konstant, en kombination av födelse och dödstalen.

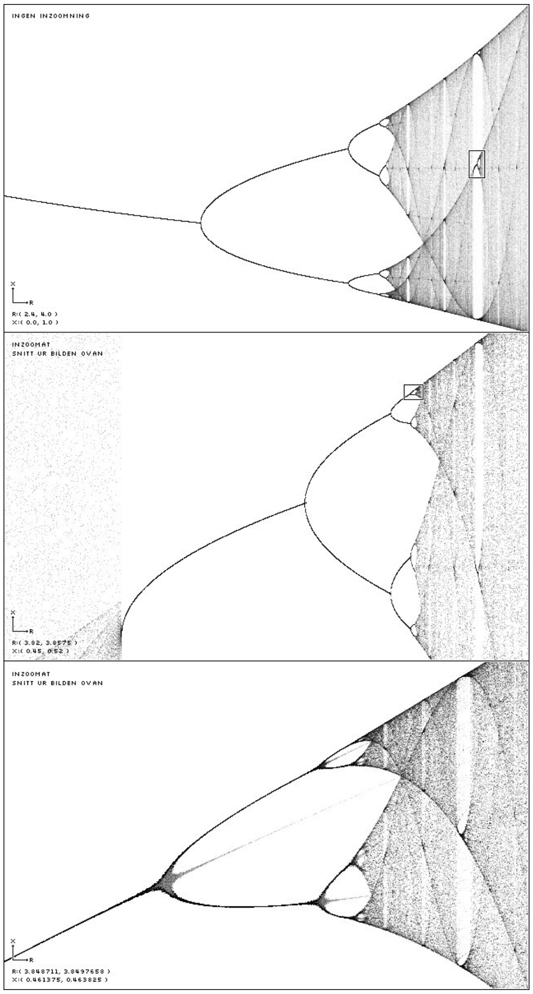
Ekv. 2

$$0 < x_0 < 1$$
$$1 < r < 4$$
$$x_{n+1} = r\, x_n(1-x_n)$$



Robert May

May studerade hur x betedde sig för mycket stora n. Det han upptäckte var att systemet uppvisade en vanlig kaotisk egenskap, periodfördubbling. För låga r kommer x för stora n att vara ett fixt värde. Men för något större r kommer x att ocsillera mellan två värden för stora n. När man ytterligare ökar r kommer x att oscillera först mellan 4 värden, sedan mellan 8, 16, 32 värden... osv. Detta fenomen, som kallas periodfördubbling, uppträder tätare och tätare tills ingen periodicitet längre kan skönjas. Systemet har då blivit kaotiskt. Det är helt deterministiskt, men samtidigt är det ogörligt att förutsäga värdet på x för ett givet n utan att simulera alla mellanliggande steg.



Exempel på skalinvarians hos bifurkationsdiagram.

Diagrammen till höger visar på den liggande axeln olika värden på parametern r och längs den stående axeln vilka värden x antar efter väldigt många iterationer av ekv. 2. För låga r (< 3) stabiliserar sig x till en enda värde, men för högre r kommer x att fastna i en oscillation mellan flera värden.

De fraktala egenskaperna uppkommer från just denna periodfördubbling. I bifurkationsdiagrammet ser man hur förgreningarna i trädet uppvisar skalinvarians. Detta innebär att en kraftig förstoring av ett ursnitt ur trädet nära den kaotiska brytpunkten uppvisar samma struktur som ett ursnitt ur trädet med modest förstoring. Bifurkationsdiagrammet har liknande skalinvaranta egenskaper som t.ex fraktalerna Mandelbrotmängden och Kochs snöflinga.

Tillämpning

Vid studier av de kaotiska egenskaperna hos trekroppsproblemet ser man att en mycket liten förändring av en himlakropps position ger upphov till en dramatisk lägesförändring långt senare. Paralleller till Lorenzattraktorn och hur en liten förändring av partikeln läge kan få den att helt byta “fjärilsvinge” är enkla att dra vid en kvalitativ betraktelse. Om man analyserar var någonstans systemet är extra känsligt för störningar i trekroppsproblemet har man funnit att de semistabila Lagrangepunkterna är platser där himlakroppar är synnerligen känsliga för störningar. Detta innebär att en rymdsond placerad i bana kring en av de semistabila Lagrangepunkterna kan skickas godtyckligt långt bort i solsystemet med en mycket liten påverkan av dess läge. Det finns många banor för sonden som leder från ett himlakroppspars Lagrangepunkter till ett annats pars Lagrangepunkter (t.ex. från en Jorden/Månen punkt till en Solen/Mars punkt). Med mycket små förändringar av sondens läge vid dessa “depåstopp” kan en sond skickas till vilken himlakropp som helst i solsystemet. Och “mycket små förändringar av läge” betyder i rymdfartssammanhang mycket lite pengar.[11]

Nackdelen med de extremt bränslesnåla banorna är att de är mycket långsamma. Detta gör de opraktiska för bemannade uppdrag. Men automatiska prober har redan utnyttjat detta koncept vid flera tillfällen. Genesisproben som 2004 samlade in prover av solvinden låg under sitt insamlande i en kaotiskt omloppsbana kring Lagrangepunkten L1 mellan Jorden och Solen. Den nådde L1 genom en komplicerad lågenergibana mellan Lagrangepunkter.[12] En än mer dramatiskt bana tog sonden ISEE-3 som spenderade 5 år i bana kring Sol/Jord L1-punkten innan den bytte uppdrag och via en Jord/Månen Lagrangepunkt intog omloppsbana kring månen i väntan på att rätt tillfälle för en kometomkörning som innebar att sonden tog ett helt varv kring solen.[13]

Rymdfart är ett spektakulärt område som utnyttjar de kaotiska systemens speciella egenskaper. Men det är inte det enda området, och förhoppningsvis kommer denna unga matematiska inriktning att öppna nya dörrar inom både gamla och nya vetenskapliga grenar.

---

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Interplanetary_Transport_Network
[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Genesis_%28spacecraft%29
[13] http://en.wikipedia.org/wiki/ISEE-3